Тема лекции № 12. Моделирование портфеля проектов

Цель лекции: Рассмотреть задачу оптимизации портфеля инвестиционных проектов.

В основу моделей портфеля проектов положены следующие предположения.

1. Имеется некоторое потенциальное множество инвестиционных проектов, и задан общий горизонт планирования. Из множества проектов требуется сформировать портфель, то есть сформировать набор проектов, предназначенных для реализации в пределах горизонта планирования, с указанием сроков выполнения каждого проекта.

2. Тот или иной проект может быть выполнен лишь в определенных условиях. Часть таких условий может быть сформирована в результате выполнения других проектов. В частности, некоторые проекты могут начаться только после завершения некоторых других проектов. Другие проекты могут быть реализованы лишь в определенном интервале времени, когда будут существовать прогнозируемые необходимые внешние условия.

3. Реализация проекта требует затрат финансовых ресурсов. Эти затраты относятся к периодам времени реализации проекта.

4. Проект имеет финансовые результаты. Эти результаты могут охватывать продолжительное время после реализации проекта.

Они могут, в общем случае, использоваться для финансирования других проектов или других этапов данного проекта в последующие периоды времени.

5. Время в модели дискретно и представлено в виде последовательности периодов. Проекты, требующие нескольких периодов для своей реализации, разбиваются на отдельные этапы (части), каждый из которых занимает один период. При таком разбиении реализация очередного этапа требует обязательной реализации предыдущих этапов.

Разбиение на этапы позволяет сделать модель гибкой, учесть самые разнообразные варианты соединения этапов, от предельно жесткого, когда один этап однозначно следует за другим, до предельно свободного, когда каждый этап превращается в отдельный проект.

Формирование портфеля нацелено на получение максимальных финансовых результатов при заданных ограничениях по затратам, логико-временным и финансовым связям проектов, входящих в портфель.

Математическая модель формирования портфеля. Проекты, этапы и время. Пусть M – общее число проектов, анализируемых на предмет включения в портфель с целью последующей реализации. Пронумеруем все проекты числами от 1 до M, символом m будем обозначать номер проекта, так что

$1 \leq m \leq M$.

Для каждого проекта задано время его выполнения, то есть количество периодов времени его выполнения и, тем самым, число его этапов. Число этапов проекта m, его «длину», будем обозначать посредством lh(m).

Пусть T – горизонт планирования, символом t будем обозначать номер периода времени, так что $1 \le t \le T$.

Затраты. Посредством u_{mkt} обозначим затраты по реализации k-го этапа проекта m в периоде времени t. Таким образом, объем затрат по выполнению определенного этапа того или иного проекта в общем случае предполагается зависящим не только от самого проекта и от этапа его выполнения, но и от периода времени t, на который приходится данный этап.

Один и тот же этап одного и того же проекта в разные периоды времени может быть связан с разными объемами затрат. Причинами этого могут быть прогнозируемые изменения как во внешней среде, так и в характеристиках внутреннего состояния системы (инфляционные изменения, динамика валютного курса, изменения налогового законодательства, износ оборудования, изменения затрат по модернизации оборудования, по оплате труда). Эти затраты относятся к периоду t.

Введенные обозначения имеют смысл не для всех комбинаций индексов. Так, номер этапа проекта m должен быть в пределах от 1 до lh(m). Сам номер проекта m должен быть в пределах от 1 до M. Номер периода времени t также должен быть в пределах от 1 до T.

В дальнейшем, при построении и исследовании моделей, мы будем полагать величину затрат u_{mkt} равной 0 во всех тех случаях, когда комбинация индексов теряет смысл.

Обозначим посредством U_{mt} суммарные затраты по реализации проекта номер m, начинающейся в периоде t. Тогда U_{mt} определится формулой:

$$U_{mt} = \sum_{j=1}^{lh(m)} u_{mj,t+j-1} .$$

Посредством W_t обозначим плановую предельную допустимую сумму затрат на проведение всех проектов в периоде времени t.

Посредством W будем обозначать общую сумму плановых затрат на проведение всех проектов по всему горизонту планирования T, то есть

$$\sum_{t=1}^{T} W_t = W.$$

Обозначим посредством w_t реально используемую сумму затрат на проведение всех проектов в периоде времени t. Таким образом, в каждом периоде времени t должно выполняться неравенство $w_t \le W_t$.

Допустимые объемы затрат W_t, выделенные для данного периода t, могут оказаться использованными не полностью. Неиспользованный объем определяется разностью Δt: $\Delta t = W_t - w_t$.

Доходы. Посредством d_{mkt} обозначим доход, получаемый в периоде времени t на k-м этапе от начала реализации проекта номер m.

Таким образом, размер дохода может зависеть не только от самого проекта и от периода получения дохода, но и от времени реализации проекта. Естественным условием является неравенство $k \ge 1$. Оно означает, что получение дохода от реализации проекта не может начаться раньше начала осуществления данного проекта. При выполнении обратного условия, то есть при выполнении неравенства k < 1, величину d_{mkt} будем полагать равной 0.

Время, стоимость и дисконтирование. В модели может быть предусмотрена возможность переноса неиспользованных объемов затрат или полученных доходов на последующие периоды. Перенос средств из периода в период может осуществляться с учетом их возможного роста по соответствующей ставке.

Доходы, выходящие за пределы горизонта планирования, дисконтируются и приводятся к концу горизонта планирования, к концу периода T.

Посредством q обозначим ставку дисконтирования за один период времени, позволяющую пересчитывать объемы платежей при переходе от одного периода к другому. В частном случае, при q=0, получаем недисконтированные пересчеты.

Переменные и условия. Введем переменные. Посредством x_{mt} обозначим факт начала реализации проекта m в периоде времени t. Таким образом,

$$x_{mt} = \begin{cases} 1, & \text{если период времени } t \text{ является начальным периодом} \\ & \text{реализации проекта } m, \\ 0, & \text{в противоположном случае.} \end{cases}$$

Если неизвестно точное время начала проекта m, но известно, что он должен начаться в промежутке от t_1 до t_2, то такое условие можно задать в виде равенства:

$$\sum_{t=t_1}^{t_2} x_{mt} = 1.$$

Посредством x_m обозначим сумму переменных x_{mt} по всем t:

$$x_m = \sum_{t=1}^{T} x_{mt}.$$

Таким образом, условие $x_m \le 1$ означает, что проект номер m может начаться не более одного раза, то есть начинается один раз или не начинается вообще. Дополнительное условие:

$$\sum_{t=T-lh(m)+2}^{T} x_{mt} = 0$$

означает, что проект m не может начаться слишком поздно, так, чтобы успеть закончиться в пределах горизонта планирования. Это равенство позволяет предыдущие условия записать с помощью более коротких сумм. Напомним, что посредством lh(m) обозначается длительность реализации проекта m, выражаемая числом периодов времени или числом этапов реализации проекта.

Для включения в модель мы всю эту совокупность условий выразим в виде следующей системы:

$x_{mt} \in \{0,1\}$ для всех t, удовлетворяющих условию $1 \le t \le T$, $x_{mt} = 0$ для всех t, удовлетворяющих условию $T - lh(m) + 2 \le t \le T$, $x_m = \sum_{t=1}^{T} x_{mt}$, $x_m \le 1$. Такая система условий будет подразумеваться включенной в модель для каждого проекта m.

Логико-временные связи. Логические связи несложно ввести в модель, сделав ее нелинейной, используя, например, произведение переменных или другие нелинейные функции. Произведение переменных традиционно используется при формализации конъюнкции условий, выражаемой союзом «и». В представленных далее построениях мы обращали специальное внимание на то, чтобы не выходить за рамки линейных моделей с булевыми (двоичными) переменными.

Предположим, что обязательно должна быть выполнена целая группа проектов: проекты с номерами m_1, m_2, …m_s. Это можно формально выразить различными способами. Например, в виде системы условий:

$x_{m_1} = 1, \quad x_{m_2} = 1, \quad \ldots \quad x_{m_s} = 1.$

Другой способ – написать одно равенство: $x_{m_1} + x_{m_2} + \ldots + x_{m_s} = s.$

Предположим, что из некоторой группы проектов с номерами m1,...ms в портфель обязательно должны быть включены по крайней мере r проектов (с заранее не определенными номерами).

Тогда в модель вводится условие $x_{m_1} + \ldots + x_{m_s} \ge r$.

Это условие обеспечивает равенство 1 по крайней мере r членов из s слагаемых, входящих в сумму, то есть обеспечивает включение в портфель по крайней мере r проектов.

Рассмотрим моделирование основных логических связей между проектами.

Конъюнкция (союз «и», логическое умножение). Пусть требуется, чтобы все s проектов данной группы обязательно вошли в портфель.

Тогда в неравенстве следует положить r = s. Условие примет вид: $x_{m_1} + \ldots + x_{m_s} \ge s$, что обеспечит равенство 1 всех s слагаемых, входящих в сумму, то есть обеспечивает включение в портфель всех s проектов.

Дизъюнкция (союз «или», логическое сложение). Пусть требуется, чтобы хотя бы один из s проектов данной группы обязательно вошел в портфель. Тогда в неравенстве следует положить r=1. Условие примет вид: $x_{m_1} + \ldots + x_{m_s} \ge 1$, что обеспечит равенство 1 по крайней мере одного из s слагаемых, входящих в сумму, то есть обеспечит включение в портфель одного из s проектов.

Отрицание (частица «не»). Пусть требуется, чтобы ни один из проектов данной группы не вошел в портфель. Тогда в модель вводим условие: $x_{m_1} + \ldots + x_{m_s} = 0$.

Оно обеспечивает равенство 0 всех s слагаемых, входящих в сумму, то есть обеспечивает невключение в портфель каждого из s проектов.

Разумеется, невключение в портфель той или иной группы проектов можно промоделировать и другими способами. Например, просто исключить из модели соответствующие переменные. Приведенный выше способ удобен при вариантном анализе, когда можно, не изменяя состав переменных, оперативно модифицировать систему ограничений.

Импликация (союз «если, то»). Предположим, что проект номер m может начаться только после окончания проекта номер n. Вводим в модель систему неравенств:

$$x_{mt} - \sum_{i=1}^{t-lh(n)} x_{ni} \le 0,$$

$$1 \le t \le T.$$

Подразумевается, что если верхний предел суммирования оказывается меньше нижнего, то сумма равна 0.

Рассмотрим условие в виде неравенства подробнее.

Если проект m не реализуется, то величины x_{mt} для всех t равны 0.

При этом неравенство будет выполнено.

Если же проект m реализуется, то x_{mt} для некоторого t будет равно

1. Подставим это x_{mt} в неравенство. Для того чтобы оно было выполнено, необходимо, чтобы сумма была не меньше 1. А для этого, в свою очередь, необходимо, чтобы для некоторого периода времени i началось выполнение проекта n. При этом, согласно неравенству, период i наступает раньше, чем период t, по крайней мере на lh(n) периодов времени. Следовательно, проект n начнется и успеет закончиться до начала проекта m.

Условия в виде неравенств можно модифицировать. Предположим, что проект m может начинаться не просто после окончания проекта n, а не менее чем через j периодов времени после окончания n. Система неравенств

$$x_{mt} - \sum_{i=1}^{t-lh(n)-j} x_{ni} \le 0,$$

$$1 \le t \le T.$$

обеспечивает зазор между концом выполнения проекта n и началом выполнения проекта m по крайней мере в j периодов времени.

Рассмотрим другой вариант. Предположим, что проект m может начинаться и до окончания проекта n, но все-таки когда в реализации проекта n прошло определенное число этапов. Система неравенств

$$x_{mt} - \sum_{i=1}^{t-lh(n)+j} x_{ni} \le 0,$$

$1 \le t \le T$ обеспечивает начало выполнения проекта m не ранее чем за j этапов до окончания проекта n.

Комбинации формально выраженных условий позволяют выразить самые разнообразные логические связи, накладываемые на выполнение проектов.

Рассмотрим несколько примеров.

Пусть, например, требуется, чтобы были выполнены проекты (m_1 или m_2) и (m_3 или m_4).

Это выражается системой неравенств

$$x_{m_1} + x_{m_2} \geq 1,$$

$$x_{m_3} + x_{m_4} \geq 1.$$

Рассмотрим другой пример. Пусть теперь требуется, чтобы были выполнены проекты (m_1 и m_2) или (m_3 и m_4).

Введем дополнительные булевы переменные y_1 и y_2. С их помощью данное требование выразится следующей системой неравенств:

$$x_{m_1} + x_{m_2} \geq 2y_1,$$

$$x_{m_3} + x_{m_4} \geq 2y_2.$$

$$y_1 + y_2 \geq 1.$$

$$y_1,\ y_2 \in \{0;1\}\ .$$

Согласно последнему неравенству, обе переменные y_1 и y_2 не могут одновременно равняться 0. По крайней мере, одна из них должна быть равна 1. Таким образом, в правой части, по крайней мере, одного из двух верхних неравенств стоит 2. Следовательно, в этом неравенстве каждая из сумм слева равна 1, то есть каждый из проектов, указанных в этих суммах, должен быть реализован.

Контрольные вопросы:

1.Описать задачу оптимизации портфеля инвестиционных проектов.

2. Математическая модель формирования портфеля.

3. Описать моделирование основных логических связей между проектами.

4. Дать определения основным определениям: затраты, доходы, время, стоимость и дисконтирование.

Литература:

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах, Изд. "Высшая школа" 1986.

2. Бурков В.Н., Кулжабаев Н.М. Активные системы и деловые игры– Алматы:2000.

3. Бурков В.Н. Основы математической теории активных систем. М.: Наука, 1977.

4.Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология – Москва: Наука, 1988

5.Зуховицкий С.И. Авдеева Л.И. Линейное и выпуклое программирование, Изд. "Наука". Москва 1967.

6.Кулжабаев Н.М. Исследование операции. Учебное пособие. –Алматы:РИК КАО имени И.Алтынсарина,1999.

7.Кулжабаев Н.М. Муханова Г.С. Системный анализ и исследование операции.